

שאלה מספר 1:

לדוד שנפחו 600 ליטרים ישנם שני ברזים, אחד למילוי והשני להרקה. ההפרש בין זמן מילוי הדוד כאשר הוא ריק לבין זמן הרקת הדוד כאשר הוא מלא הוא יותר גדול מ-4 דק'. פעם אחת כאשר הדוד היה מלא, פתחו בטעות את שני הברזים ואז התרוקן הדוד במשך 24 דק'.

מצא באיזה תחום מספרים נמצאת כמות המים הנכנסת לדוד דרך ברז המילוי בדקה ובאיזה תחום מספרים נמצאת כמות המים היוצאת מהדוד דרך ברז ההרקה בדקה.

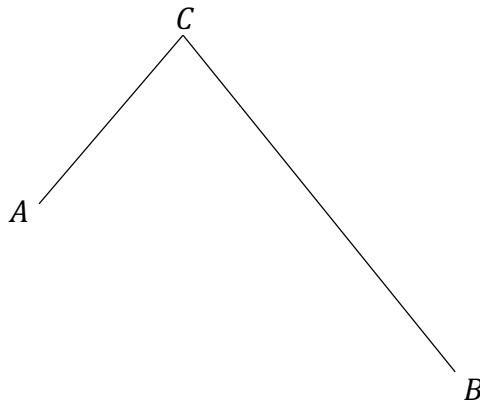
תשובות: ברז מילוי $50 < p < 75$ וברז ריקון $25 < p$

שאלה מספר 2:

רוכב אופניים רכב מעיר A לעיר B. במסלול שבין שתי הערים יש תחילה עלייה ולאחר מכן ירידה, כמתואר בציור. מהירות הרוכב בירידה היא קבועה וגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו בעלייה. הרוכב עבר את הדרך מ-A ל-B ב-5 שעות ואת הדרך חזרה ב-7 שעות. מהירות הרוכב בעלייה שבדרך מ-A ל-B שווה למהירות הרוכב בעלייה שבדרך מ-B ל-A. גם מהירות הרוכב בירידה בכל אחת מהדרכים היא אותה המהירות. אורך המסלול בין שתי הערים הוא 80 ק"מ.

א. מצא את מהירות הרוכב בעלייה.

ב. מצא את אורך המסלול מ-C ל-B.



תשובות: א. 10 קמ"ש. ב. 60 ק"מ

שאלה מספר 3:

לביצוע עבודה מסוימת דרושים בסה"כ 60 ימי עבודה. קבוצת פועלים החלה לבצע את העבודה בהתאם לתכנון מראש. לאחר שעבדו יום אחד נוספו לקבוצה m פועלים. אחרי שעבדו עוד יום אחד נוספו לקבוצה עוד m פועלים והם סיימו את העבודה יום אחד לפני הזמן המתוכנן.

א. הבע באמצעות m את מספר הפועלים שהיו בקבוצה בתחילת העבודה.

ב. ידוע שבתחילת העבודה היו 15 פועלים.

1. מצא בכמה ימים ביצעו הפועלים את העבודה.

2. מצא את m.

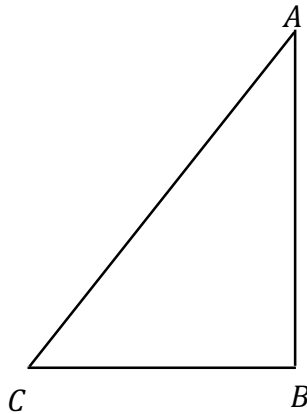
תשובות: א. $\frac{5m \pm \sqrt{25m^2 + 480m}}{-2}$. ב. 3 ימים. $m = 5$.

שאלה מספר 4:

שני רוכבי אופניים רכבו מהעיר A לעיר C. המרחק בין הערים הוא 65 ק"מ. הרוכבים הגיעו למטרתם בשני מסלולים שונים: הרוכב הראשון רכב ישירות מ-A ל-C. הרוכב השני רכב תחילה לעיר B, הנמצאת דרומה ל-A, לאחר מכן לעיר C, הנמצאת מערבה לעיר B. שני הרוכבים נסעו במהירות שווה וקבועה.

א. מצא את מהירות הרכיבה של רוכבי האופניים.

ב. באיזה מרחק מהעיר C היה הרוכב השני כאשר הרוכב הראשון הגיע אליה.



תשובות: א. 25 קמ"ש. ב. 20 ק"מ

שאלה מספר 5:

שני ברזים ממלאים בריכה. אם הברז הראשון היה פתוח $\frac{1}{3}$ מהזמן שדרוש לברז השני למלא לבד את הבריכה והברז השני היה פתוח $\frac{1}{3}$ מהזמן שדרוש לברז הראשון למלא לבד את הבריכה אז החלק מהבריכה שהם היו ממלאים ביחד היה m . הברז הראשון ממלא לבד את הבריכה ביותר שעות מאשר הברז השני ממלא אותה לבד.

א. הבע באמצעות m את היחס בין מספר השעות שהברז הראשון ממלא לבד את הבריכה לבין מספר השעות שהברז השני ממלא לבד את הבריכה.

ב. נתון שהיחס שבסעיף א' קטן או שווה ל- $\frac{3}{2}$. מצא באיזה תחום מספרים נמצא m .

ג. נתון שדרך הברז הראשון עוברים 6 מ"ק מים בשעה. מצא את נפח הבריכה אם נתון שהיחס שבסעיף א' הוא $\frac{3}{2}$ ושני הברזים ממלאים ביחד את הבריכה במשך 3 שעות.

תשובות: א. $\frac{3m + \sqrt{9m^2 + 4}}{2}$. ב. $\frac{13}{18} < m < \frac{2}{3}$. ג. 45 מ"ק.

שאלה מספר 6:

סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 5a_n + 4$, $a_1 = 1$.

א. הוכח שהסדרה המוגדרת ע"י $b_n = a_{n+1} - a_n$ היא סדרה הנדסית ומצא את הנוסחה ל- b_n .

ב. נתון $a_n = b \cdot 5^{n-1} + c$. מצא את b ו- c .

ג. מצא את הנוסחה לסכום $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

תשובות: א. הוכחה. ב. $b = 2, c = -1$. ג. $S = \frac{1}{2}(5^n - 1) - n$.

שאלה מספר 7:

בכד א' 3 כדורים אדומים ו-2 לבנים. בכד ב' 3 כדורים אדומים וכדור אחד לבן.

א. מוציאים באקראי עם החזרה 4 כדורים מכד א' ו-5 כדורים מכד ב'. חשב את ההסתברויות:

1. שבדיוק 2 מהכדורים שהוצאו מכד א' הם אדומים ובדיוק 4 מהכדורים שהוצאו מכד ב' הם אדומים.

2. שבין הכדורים שהוצאו מכד א' וגם בין הכדורים שהוצאו מכד ב' יש כדורים משני הצבעים.

ב. מכניסים את כל הכדורים משני הכדים לכד אחד.

1. מוציאים באקראי עם החזרה n כדורים מהכד. הבע באמצעות n את ההסתברות שבדיוק שני כדורים מהכדורים שהוצאו הם אדומים.

2. מוציאים באקראי עם החזרה n כדורים עד שמתקבלים בדיוק שני כדורים אדומים ואז מפסיקים להוציא כדורים. חשב את ההסתברות ש $n = 5$.

3. מוציאים באקראי עם החזרה n כדורים מהכד. ידוע שבדיוק כדור אחד מבין הכדורים שהוצאו הוא אדום. הבע באמצעות n את ההסתברות שהכדור האדום היחיד שהוצא הוא הכדור הראשון.

תשובות: א. 0.13668 (1. ב. 0.6435) (1. ג. $\frac{1}{n} \left(3 \frac{16}{243} (2 - n(n-1)) \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)$

שאלה מספר 8:

נתונים שני מאורעות בניסוי מקרי, A ו- B .

א. הוכח שמתקיים:

$$\frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} = \frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})} \cdot \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

ב. נתון:

$$\frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})} = \frac{2}{3}$$

חשב את $P(A)$.

ג. נתון:

$$P(B) = \frac{3}{5}$$

חשבת את $P(A \cap B)$.

תשובות: א. הוכחה. ב. ג. $\frac{3}{7}$. ג. $\frac{1}{5}$.

שאלה מספר 9:

ביישוב מסוים ל- 60% מהמשפחות יש דירה. בוחרים באקראי משפחה מהישוב. ההסתברות שלמשפחה יש מכונית אם ידוע שיש לה דירה גדולה פי $1\frac{2}{3}$ מההסתברות שלמשפחה יש מכונית אם ידוע שאין לה דירה.

א. 1. הראה שההסתברות שלמשפחה יש גם מכונית וגם דירה גדולה פי $2\frac{1}{2}$ מההסתברות שלמשפחה יש מכונית אבל אין דירה.

2. מה ההסתברות שלמשפחה שנבחרה יש דירה אם ידוע שיש לה מכונית?

ב. נתון גם שמבין המשפחות שאין להן מכונית, מספר המשפחות שיש להן דירה קטן פי 2 ממספר המשפחות שאין להן דירה. בוחרים

שוב באקראי משפחה מהישוב. מה ההסתברות שיש למשפחה גם דירה וגם מכונית?

ג. 1. הראה שיש תלות בין המאורע "למשפחה יש דירה" למאורע "למשפחה יש מכונית".

2. איזה נתון צריך להיות נתון במקום $1\frac{2}{3}$ כדי ששני המאורעות יהיו בלתי תלויים (ללא קשר לסעיף ב')?

תשובות: א. 1. הוכחה. 2. $\frac{5}{7}$. ב. 0.5. ג. 1. הוכחה 2. 1.

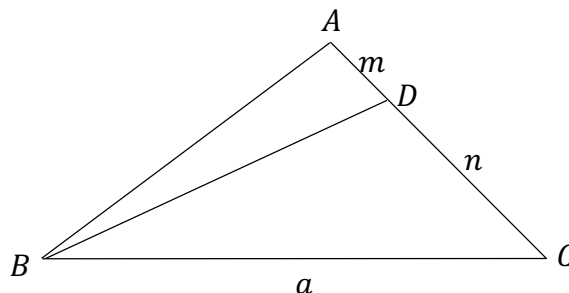
שאלה מספר 10:

מתקיים D נקודה על הצלע AC במשולש ABC כך שמתקיים $AB = BD$. נסמן:

$$BC = a, DC = n, AD = m, a = 2n + m$$

א. חשב את זווית C .

ב. הוכח שהמרחק בין מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC למרכז המעגל החוסם את המשולש BDC הוא $\frac{m}{\sqrt{3}}$.



תשובות: א. 60° . ב. הוכחה

שאלה מספר 12:

ידוע שלפונקציה

$$f(x) = -\frac{4x^3 + 4x^2 + ax - 18}{2x + 3}$$

אין אסימפטוטה אנכית.

א. מצא את הפרמטר a .

ב. העבירו משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $y = 6$. למשיק שיפוע שלילי. מצא את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, ע"י

המשיק וע"י ציר ה- x .

תשובות: א. $a = -15$. ב. 12.375.

שאלה מספר 13:

נתונה הפונקציה

$$f(x) = \frac{Ax - x^2 - 16}{Bx^2}$$

הישר $y = -1$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה. שיפוע הישר, המשיק לפונקציה ב- $x = -2$, הוא -6.5 .

א. מצא את ערכי הפרמטרים A ו- B .

ב. הצב את הערכים A ו- B שמצאת ומצא את:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה.

2. נקודות החיתוך עם הצירים.

3. אסימפטוטות מקבילות לצירים.

4. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון שהפונקציה $g(x)$ מקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.

1. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

2. נתון ששיעור ה- y של $g(x)$ בנקודת המקסימום שלה, מסעיף קודם, הוא a ושיעור ה- y בנקודת המינימום הוא b . נתון

$g(1) = 15$. הבע באמצעות a ו- b את השטח המוגבל ע"י הגרף של $f(x)$ וציר ה- x בתחום $1 \leq x \leq 8$.

תשובות: א. $A = 10, B = 1$. ב. $(1, 0), (2, 0), (8, 0)$. ג. $(2, 0), (8, 0)$. ד. $x = 2$

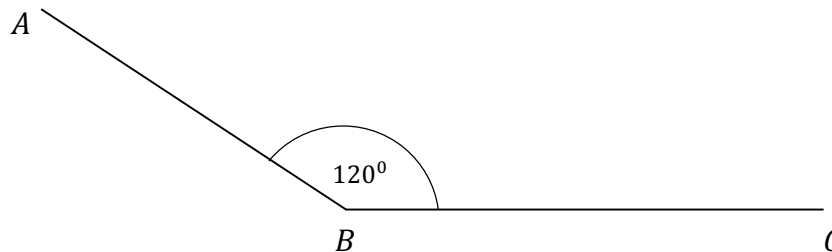
מקסימום ו- $x = 8$ מינימום.

שאלה מספר 14:

נתון שהמרחק בין יישוב A ליישוב B הוא k ק"מ (קבוע). רוכב אופניים אחד יצא בשעה מסוימת מהיישוב A ליישוב B ורכב במהירות קבועה של 10 קמ"ש. באותה שעה יצא מהיישוב B רוכב אופניים שני שרכב ליישוב C במהירות קבועה של 14 קמ"ש. נתון שהזווית ABC היא 120° . ידוע שהמרחק בין הרוכבים היה מינימלי כעבור 1.5 שעות לרכיבתם (לפני שהרוכב מ-A הגיע ל-B).

א. מצא את המרחק שבין היישוב A ליישוב B.

ב. מצא את המרחק שהיה בין הרוכבים כאשר הרוכב שיצא מהיישוב A ליישוב B.



תשובות: א. 78 ק"מ. ב. 109.2 ק"מ

שאלה מספר 15:

א. נתונה הפונקציה

$$f(x) = 3 + \frac{bx^2 + 9}{x^2 - a^2}$$

מתקיים a, b פרמטרים חיוביים.

1. הבע באמצעות a ו- b את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציות.

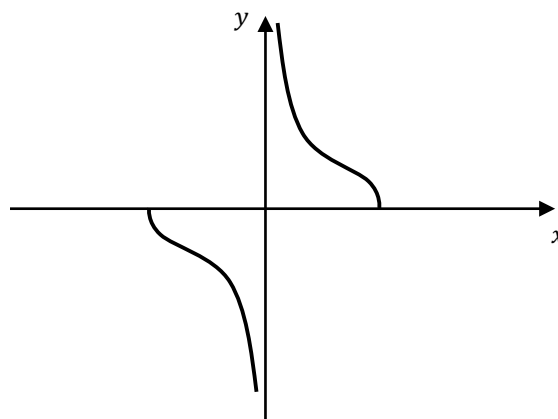
2. הראה שנקודת הקיצון של הפונקציה לא תלויה ב- b .

3. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. (אין קשר בין הסעיפים) נתון שרטוט גרף הפונקציה

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad a > 0$$

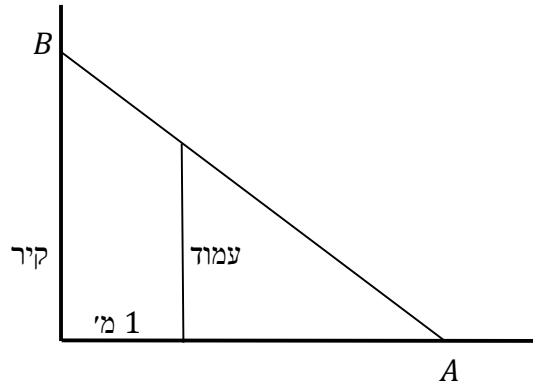
השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, הישר $y = \sqrt{3}$ והצירים מסתובב סביב ציר ה- x . הבע באמצעות a את נפח גוף הסיבוב המתקבל.



תשובות: א. $x = \pm a, y = 3 + b$ (2. הוכחה. 3. עלייה: $x < -a$ או $-a < x < 0$ ירידה: $0 < x < a$ או $x > a$. ב. $2\pi a$ יח' נפח.

שאלה מספר 16:

נתון קיר ובמרחק 1 מ' ממנו נמצא עמוד שגובהו $\sqrt{8}$ מ'. קורה, הנשענת על העמוד, נוגעת בקרקע בנקודה A ובקיר בנקודה B. מהו האורך המינימלי של הקורה AB?



תשובה: $\sqrt{27}$ מ'.

שאלה מספר 17:

מתקיים $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$. בציור מוצג הגרף של $f'(x)$. $f(x)$ היא פונקצייה רציפה המוגדרת בתחום $x \geq -3$. נתון:

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 12x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}}$$

א. מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.

ב. מצא את האסימפטוטה האנכית של $f'(x)$.

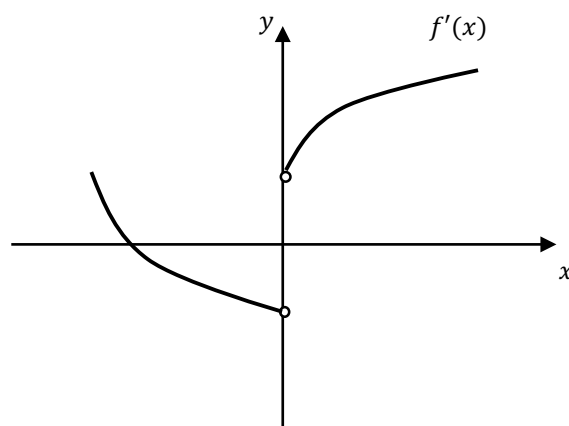
ג. מצא את שיעור ה- x של נקודת המקסימום של הפונקציה.

ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ה. נתון $f(a) = 4\sqrt{2}$, ומתקיים $-2 < a < 0$. השטח המוגבל ע"י הגרף של $f'(x)$, ציר ה- x והישר $x = a$ הוא $8 - 4\sqrt{2}$.

מצא את ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה (בלי למצוא את $f(x)$ ואת a).

ו. ענה על סעיף קודם מבלי להעזר בנתונים המופיעים בסעיף, אם נתון $f(0) = 0$.



תשובות: א. $x > -3, x \neq 0$. ב. $x = -3$. ג. $x = -2$. ד. עלייה: $-2 < x < -3$ או $x > 0$ ירידה: $0 < x < -2$. ה.ו.

18.

שאלה מספר 18:

נתונה הפונקציה:

$$f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{x}\right)$$

א. הוכח: כל נקודות הקיצון של גרף $f(x)$ נמצאות במרחק של יחידה אחת מציר ה- x .

ב. את הסעיפים הבאים פתור בתחום $1 \leq x \leq 3$.

1. מצאת את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

2. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$.

3. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון $f'(x) = g(x)$. הפונקציה $g(x)$ חיובית לכל x בתחום $2 \leq x \leq 3$. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$

לכין ציר ה- x והישרים $x = 2$ ו- $x = 3$.

ד. מצא עבור אילו ערכי k חותך את הישר $y = \frac{1}{k}x$ את גרף הפונקציה $f(x)$ רק פעמיים בתחום $1 \leq x \leq 3$.

ה. הגדירו פונקציה חדשה $h(x) = |f(x) - m|$ בתחום $1 \leq x \leq 3$ ונתון $m > 0$. נתון שגרף הפונקציה $h(x)$ משיק לגרף

הפונקציה $f(x)$ בתחום $1 \leq x \leq 3$. מצא את ערכו של הפרמטר m .

שאלה מספר 19:

ענה על הסעיפים הבאים עבור הפונקציה הנתונה:

$$f(x) = \frac{x}{x\sqrt{x} + 4}$$

א. תחום הגדרה.

ב. נקודות חיתוך עם הצירים.

ג. אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ד. נקודות קיצון.

ה. תחומי עלייה וירידה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ז. הוכח על סמך סעיפים קודמים שלכל $x \geq 0$ מתקיים $3x \leq x\sqrt{x} + 4$.

ח. העזר בגרף הפונקציה $f(x)$ ושרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול

אחת.

תשובות: א. $x \geq 0$. ב. $(0, 0)$. ג. $y = 0$. ד. מקסימום: $(4, \frac{1}{3})$ מינימום $(0, 0)$. ה. עלייה: $0 < x < 4$ ירידה: $x > 4$.

שאלה מספר 20:

נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$$

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$$

א. ענה על הסעיף בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

1. מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

2. מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x עבור הפונקציה $f(x)$.

3. מצא תחומי עלייה וירידה של $f(x)$.

4. סרטט סקיצה של $f(x)$.

ב. ענה על הסעיף בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.

1. מצא את תחום ההגדרה של $g(x)$.

2. הוכח $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

3. סרטט סקיצה של $g(x)$.

ג. מצא את ערך הביטוי:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

תשובות: א.1 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ **א.2** $x = \pm \frac{\pi}{2}$ **א.3** עולה בכל תחום הגדרתה. **ב.1** $0 < x < \pi$. **ג. אפס.**